Journal of Pure and Applied Algebra 24 (1982) 261–264
North-Holland Publishing Company

TRIVIALISATION DES MODULES PROJECTIFS. LA METHODE DE KRONECKER

Daniel FERRAND

I.R.M.A.R., Université de Rennes, France

Communicated by H. Bass
Received May 1981

Soient R un anneau commutatif et $R(T)$ l'anneau des fractions de $R[T]$ obtenu en rendant inversibles les polynômes $\sum_n r_nT^n$ tels que $\sum_n r_nR = R$. Alors tout $R(T)$-module projectif de rang constant est libre.[1]

1. Introduction

Il y a un siècle, Kronecker tentait d'unifier et de fonder algébriquement la Théorie de nombres et la Géométrie algébrique; parmi bien d'autres idées, il utilisait systématiquement les deux suivantes:

– Lorsque l'on est en présence d'un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_n$ (disons d'un anneau R), on peut les remplacer par l'unique élément $x_1T_1 + \cdots + x_nT_n$ de $R[T_1, \ldots, T_n]$. C'est la méthode dite d'adjonction d'indéterminées.

– On peut souvent ramener l'étude d'un polynôme $P(T_1, \ldots, T_n)$ à n variables à celle d'un polynôme à une seule variable T en posant $T_i = T^{d^{i-1}}$: si d est assez grand, l'unicité de l'écriture d-adique d'un entier montre que chaque coefficient du polynôme initial apparait comme coefficient dans le nouveau polynôme. C'est le 'principe de spécialisation'.

Dans cette note, je montre que ces méthodes, pour classiques qu'elles soient, peuvent encore conduire à des résultats nouveaux.

Je tiens à remercier Dan Laksov de m'avoir invité à l'Institut Mittag-Leffler en Mai 1980; c'est dans la superbe bibliothèque de cet institut que ces modestes remarques ont vu le jour.

2. L'anneau $R(T)$

2.1. Pour tout anneau commutatif unitaire R, on notera $R(T)$ l'anneau $S^{-1}R[T]$, où S désigne l'ensemble des polynômes $f(T) = \sum r_nT^n$ tels que l'idéal engendré par

[1] La trivialité des $R(T)$-modules inversibles a été prouvée indépendamment par D.D. Anderson (University of Iowa). *Note ajouté à la correction des épreuves:* B.R. McDonald et W.C. Waterhouse ont démontré un résultat plus général; voir Proc. Amer. Math. Soc. 83(3) (Nov. 1981).

les coefficients

$$c(f)=\sum r_n R$$

soit égal à R; ce sont les polynômes dont l'image dans $R/\mathfrak{m}[T]$ est non nulle pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$; par suite S est une partie multiplicative.

Il faut prendre garde que cet anneau est distinct de celui obtenu en rendant inversibles les seuls polynômes unitaires, bien que certains auteurs, dont Quillen, le désigne par le même symbole.

2.2. Le morphisme $R \to R(T)$ est fidèlement plat.

2.3. Lemme. (i) *Soit f un polynôme à coefficients dans R. Alors $c(f)=R$ si et seulement si le morphisme $R \to R[T]/(f)$ est quasi-fini (i.e. à fibres finies, éventuellement nulles).*

(ii) *Soit I un idéal de $R[T]$ tel que le morphisme $R \to R[T]/I$ soit quasi-fini. Alors I contient un polynôme f tel que $c(f)=R$.*

Démonstration de (ii): si R est un corps, I est engendré par un polynôme non nul; par suite, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R, il existe un polynôme $f \in I$ tel que $c(f) \not\subset \mathfrak{m}$; la quasi-compacité de $\operatorname{Spec}(R)$ permet de trouver une famille finie $f_1, \dots, f_m$ de polynômes dans I tels que les ouverts $D(c(f_i))$ recouvrent $\operatorname{Spec}(R)$; pour un entier d supérieur aux degrés des f_i chaque coefficient de $f=\sum_i T^{d^i} f_i$ est un coefficient d'un des f_i; donc $c(f)=R$.

2.4. Proposition. *Si $R \to S$ est un morphisme entier, le morphisme $S \otimes_R R(T) \to S(T)$ est un isomorphisme.*

Soient $g \in S[T]$ un polynôme tel que $c(g)=S$, et I l'idéal de $R[T]$ image réciproque de $gS[T]$. Comme le morphisme $R[T]/I \hookrightarrow S[T]/(g)$ est entier, le morphisme $R \to R[T]/I$ est quasi-fini; d'après 2.3(ii), il existe $f \in I$ tel que $c(f)=R$, et on a $f=gh$ dans $S[T]$.

2.5. La formation de $R[T]$ ne commute pas à la localisation: soient x, y une suite R-régulière telle que $xR+yR \neq R$ et $t=x+y$; le morphisme $R(T)_t \to R_t(T)$ n'est pas surjectif car l'inverse de $x+yT$ n'est pas dans $R(T)_t$.

2.6. Le groupe projectif $\mathrm{GP}(2,R)=\mathrm{GL}(2,R)/R^{\cdot}$ opère sur $R(T)$ car si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est une matrice inversible, la fraction $\frac{aT+b}{cT+d}$ est dans $R(T)$ puisque $cR+dR=R$.

3. Le cas affine

3.1. Théorème. *Pour tout anneau R, tout $R(T)$-module projectif de rang constant est libre.*

Soit F un $R(T)$-module projectif de rang constant. Il suffit de montrer que F possède un facteur direct isomorphe à $R(T)$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in F$ et une forme linéaire $u: F \to R(T)$ tels que $u(x)$ soit inversible dans $R(T)$.

Désignons toujours par S l'ensemble des polynômes $f \in R[T]$ tels que $c(f) = R$. On peut construire un $R[T]$-module de présentation finie E et un isomorphisme

$$F \sim S^{-1}E.$$

On aura donc aussi un isomorphisme

$$F^{\vee} = \mathrm{Hom}_{R(T)}(F, R(T)) \sim S^{-1}E^{\vee} = S^{-1}\,\mathrm{Hom}_{R[T]}(E, R[T]).$$

L'application

$$\begin{aligned} E^{\vee} \otimes_{R[T]} E &\longrightarrow R[T], \\ u \otimes x &\longmapsto u(x) \end{aligned}$$

devient surjective après localisation par S; il existe donc des éléments $x_i \in E$ et des formes linéaires $u_i: E \to R[T]$, $i = 1, \ldots, m$, tels que

$$\sum_i u_i(x_i) \in S.$$

Chaque u_j définit une suite de formes R-linéaires $u_{jk}: E \to R$ telles que, pour tout $x \in E$, on ait

$$u_j(x) = \sum_k u_{jk}(x) T^k.$$

Soit d un entier strictement supérieur au nombre des éléments $u_{jk}(x_i)$ qui sont non nuls, pour i, j et k variables. Posons

$$u = \sum_j u_j T^{dj}, \qquad x = \sum_i x_i T^{d^2 i}.$$

On a donc

$$u(x) = \sum_{i,j,k} u_{jk}(x_i) T^{id^2 + jd + k}.$$

D'après le choix de d, l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N} &\longrightarrow \mathbf{N}, \\ (i, j, k) &\longmapsto id^2 + jd + k \end{aligned}$$

est injective sur l'ensemble des triplets tels que $u_{jk}(x_i) \neq 0$. Par suite, chaque coefficient du polynôme (en T) $u(x)$ est égal à l'un des $u_{jk}(x_i)$; l'idéal qu'ils engendrent dans R contient donc, en particulier les éléments $\sum_i u_{ik}(x_i)$, c'est-à-dire les coefficients du polynôme $\sum_i u_i(x_i)$. Bref, le polynôme $u(x)$ est dans S.

3.2. Corollaire. *Si E est un $R[T]$-module projectif de rang constant, il existe un polynôme $f \in R[T]$ tel que $c(f) = R$ et tel que E_f soit un $R[T]_f$-module libre.*

4. Généralisation

4.1. La seule difficulté pour généraliser le résultat précedent au cas d'un schéma X qui n'est pas affine est de dégager un analogue de Spec($R(T)$). Je ne sais le faire que lorsque X admet un faisceau ample; le schéma X' qui remplace Spec($R(T)$) est alors affine.

La construction proposée prolonge la remarque suivante: soient $X = \mathrm{Spec}(R)$ un schéma affine et $X' = \mathrm{Spec}(R(T))$. Alors, le morphisme

$$X' \longrightarrow \mathbf{A}^1 \times X$$

permet d'identifier X' à l'intersection des ouverts U de $\mathbf{A}^1 \times X$ tels que la projection $U \to X$ soit surjective; de plus, ceux de ces ouverts qui sont affines forment un système cofinal. (En effet, si Y est un fermé complémentaire d'un tel ouvert U, le morphisme $Y \to X$ est quasi-fini et 2.3(ii) montre qu'il existe $f \in R[T]$ tel que $c(f) = R$ et tel que U contienne $D(f)$.)

Les démonstrations des résultats énoncés sont omises car elles ne font pas intervenir d'idées nouvelles; elles consistent toutes en:

– l'adjonction d'indéterminées;

– la réduction à une seule indéterminée en spécialisant les autres en des puissances convenables de celle-ci;

– la restriction à l'ouvert d'inversibilité du polynôme ainsi construit.

4.2. Lemme. *Si X est un schéma admettant un faisceau inversible ample, il existe un ouvert* affine *U de $\mathbf{A}^1 \times X$ tel que la projection $U \to X$ soit surjective.*

4.3. Soit X un schéma admettant un faisceau inversible ample; en particulier, X est donc quasi-compact et séparé; par suite, l'ensemble des ouverts affines U de $\mathbf{A}^1 \times X$ tels que $U \to X$ soit surjectif est filtrant, et non vide d'après 4.2.

On désigne leur intersection par X'; c'est un schéma affine et le morphisme $X' \to X$ est fidèlement plat.

4.3.1. Si X est quasi-affine, et s'identifie donc à l'ouvert $D(I)$ d'un schéma affine Spec(R), oú I est un idéal de type fini de R, alors $X' = \mathrm{Spec}(S^{-1}R[T])$ oú S est l'ensemble des polynômes $f \in R[T]$ tels que I soit contenu dans la racine de $c(f)$.

4.3.2. Soient R un anneau gradué d'idéal d'augmentation R_+, et $X = \mathrm{Proj}(R)$. Graduons $R[T]$ en affectant le degré zéro à la variable T; soit S l'ensemble des polynômes f qui sont homogènes pour cette graduation, i.e. dont les coefficients sont homogènes et de même degré, et tels que R_+ soit contenu dans la racine de $c(f)$; soit R' le sous-anneau formé des éléments de degré zéro de $S^{-1}R[T]$; alors $X' = \mathrm{Spec}(R')$.

4.4. Théorème. *Soit X un schéma admettant un faisceau inversible ample. Alors, avec les notations de* 4.3, *tout $\mathcal{O}_{X'}$-module localement libre de rang constant est libre.*